

Hilbert 空间上带跳倒向随机 发展方程的适应解 (I)*

司徒荣, 许浣耀

(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 得到 Hilbert 空间上关于柱体布朗运动及 Poisson 随机鞅测度的鞅表示定理; 证明了算子半群与算子群情形下 Hilbert 空间上关于柱体布朗运动及 Poisson 鞅测度的一类倒向随机发展方程的适应解的存在唯一性定理及重要估计式.

关键词: 鞅表示定理; 带跳倒向随机发展方程; 适应解

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2001) 01-0001-05

倒向随机微分方程在计量经济, 数学金融, 随机控制和偏微分方程等分支中得到广泛的应用^[1~5]. 倒向随机发展方程作为一类倒向随机方程在随机最优控制问题的讨论过程中起到重要的作用. 胡瑛等^[6]得到了如下的半线性倒向随机发展方程

$$x_t + \int_t^T e^{A(s-t)} f(s, x_s, q_s) ds + \int_t^T e^{A(s-t)} (g(s, x_s) + q_s) dW(s) = e^{A(T-t)} X$$

适应解的存在唯一性, 其中 $\{e^{At}, t \geq 0\}$ 是一个一致有界算子半群. 本文对他们的结果进行推广, 考虑突发事件对系统所造成的影响, 方程形式如下

$$x_t + \int_t^T e^{A(s-t)} f(s, x_s, q_s, p_s) ds + \int_t^T e^{A(s-t)} (g(s, x_s) + q_s) dW(s) + \int_t^T \int_Z e^{A(s-t)} (h(s, x_s, z) + p_s(z)) \tilde{N}_k(ds, dz) = e^{A(T-t)} X$$

其中, $\{e^{At}, t \geq 0\}$ 是一个一致有界算子半群, 并且, 在更弱条件下考虑了 $\{e^{At}, t \in \mathbf{R}\}$ 是一个一致有界算子群的情形. 本文先证明了 Hilbert 空间中关于柱体布朗运动与 Poisson 鞅测度的鞅表示定理, 再导出在一致有界算子半群情形与更弱条件下算子群情形, 一类带跳的半线性倒向随机发展方程的适应解的存在唯一性, 及重要估计式.

1 记号与鞅表示定理

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间. $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 记作概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的全体可测函数的集合. $\mathbf{R}^m$ 记作 m 维欧几里德空间. $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$. 可分 Hilbert 空间 K 上的随机线性泛函是指从 K 到 $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的线性映射.

定义 称 $\{W(t), t \in \mathbf{R}_+\}$ 是可分 Hilbert 空间 K 上的柱体布朗运动, 如果: ① $\forall t \in \mathbf{R}_+, W(t)$ 是 K 上的随机线性泛函; ② 对于 $\forall n \in \mathbf{N}, \forall h_1, h_2, \dots, h_n \in K, \{(w(t)h_1, w(t)h_2, \dots, w(t)h_n), t \in \mathbf{R}_+\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^n$ 的布朗运动 (BM); ③ 对于 $\forall h_1, h_2 \in K, t \in \mathbf{R}_+$, 有 $E(w(t)h_1)(W(t)h_2) = t(h_1, h_2)$.

设 $(Z, \mathcal{B}(Z))$ 是一个可测空间. $k(\cdot)$ 是取值于可测空间 $(Z, \mathcal{B}(Z))$ 的 Poisson 点过程, $N_k(ds, dz)$ 是由 $k(\cdot)$ 定义的 Poisson 计数测度, 其补偿是 $\prod (dz)ds$, 这里 $\prod (\cdot)$ 是 $\mathcal{B}(Z)$ 上的 σ -有限测度, 对应的 Poisson 鞅测度为 $\tilde{N}_k(ds, dz)$, 并且满足: $\tilde{N}_k(ds, dz) = N_k(ds, dz) - \prod (dz)ds$. 令 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{w, \tilde{N}_k} = \sigma[W(s); s \leq t] \vee \sigma[N_k(A, (0, s]), s \leq t, A \in \mathcal{B}(Z)] \vee \mathcal{N}$, 其中 $\mathcal{N}$ 记作 P -零测集的全体, $\sigma_1 \vee \sigma_2$ 记

* 基金项目: 国家自然科学基金重大资助项目 (79790130)

收稿日期: 2000-07-21; 作者简介: 司徒荣 (1935-), 男, 教授, 博士生导师.

作由 $\sigma_1 \cup \sigma_2$ 产生的 σ 代数.

对于可分 Hilbert 空间 H , 记 $(\cdot, \cdot)$ 与 $|\cdot|$ 分别是 H 中的内积和范数. 记 $L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ 为所有取值于 H 的 $\mathcal{F}_t$ 适应过程的全体集合, 并且满足

$$\forall x \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H), |x(\cdot)| = \left(\mathbb{E} \int_0^T |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty$$

又记 $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}(0, T; H) = \{f \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H) : f \text{ 为 } \mathcal{F}_t \text{ 可料}\}$. 易知, $L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ 与 $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ 均是可分 Hilbert 空间. 对于可分 Hilbert 空间 K 与 H , $\mathcal{L}(K, H)$ 记作从 K 到 H 的连续线性算子的集合. 再记从 K 到 H 的 Hilbert-Schmidt (H.S.) 算子的集合为:

$$\mathcal{S}^2(K, H) = \{\psi \in \mathcal{L}(K, H) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\psi e_n|_H^2 < +\infty\}$$

其中, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 K 上的标准基. 类似于 $L^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$, 也可定义 $L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathcal{S}^2(K, H))$. 又记 $F^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ 是所有 H -值的 $\mathcal{F}_t$ 可料过程的集合, 并且满足 $\forall f(t, z) \in F^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$, 有

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_Z |f(t, z)|^2 \Pi(dz) dt < +\infty$$

$F^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ 也是一个 Hilbert 空间, 其范数我们仍记作 $|\cdot|$. 记 $L^2_{\Pi(\cdot)}(H)$ 是所有 H -值的并且关于 $\mathcal{B}(Z)$ 可测的函数 $f(z), z \in Z$ 的集合, 并且满足:

$$\left(\int_Z |f(z)|^2 \Pi(dz) \right)^{1/2} < +\infty$$

对于任意的 $\phi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathcal{S}^2(K, H))$, 定义随机积分

$$\int_0^T \phi(t) dW(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \phi(t) e_n d(W(T) e_n)$$

上述所定义的随机积分是有意义的, 因为

$$\mathbb{E} \left| \int_0^T \phi(t) dW(t) \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| \int_0^T \phi(t) e_n d(W(T) e_n) \right|^2 = \mathbb{E} \int_0^T |\phi(t)|_{\text{H.S.}}^2 dt < +\infty$$

现证明 Hilbert 空间中关于柱体布朗运动与 Poisson 鞅测度的鞅表示定理. 它是文 [2] 中引理 3.1 推广至带跳 H -值平方可积鞅的情形.

定理 1 (拓展鞅表示定理) 假设 M_t 是关于 $\mathcal{F}_t$ 适应的平方可积的 H -值鞅, $M_0 = 0$, 则存在唯一的 $f(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathcal{S}^2(K, H)), g(\cdot, \cdot) \in F^2_{\mathcal{F}}(0, T; H)$ 满足:

$$M_t = \int_0^t f(s) dW(s) + \int_0^t \int_Z g(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz)$$

证明 唯一性显然, 只需证存在性. 设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 分别是可分 Hilbert 空间 K, H 上的基. 固定 m , 则 $((M_t, \tilde{e}_1)_H), \dots, (M_t, \tilde{e}_m)_H = M_t^m$ 是 m 维 $\mathcal{F}_t$ 鞅. 记

$$\tilde{M}_t^m = \sum_{i=1}^m (M_t, \tilde{e}_i)_H \tilde{e}_i, \tilde{M}_t^{m,n} = E(\tilde{M}_t^m | \mathcal{F}_t^n) \in H_m \quad (1)$$

其中, $H_m = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\}$ 所生成的 m 维线性子空间, $\mathcal{F}_t^n = \mathcal{F}^{(W_{e_1}, \dots, W_{e_n}), \tilde{N}_k}$, 则 $M_t^{m,n} \triangleq ((\tilde{M}_t^{m,n}, \tilde{e}_1)_H, \dots, (\tilde{M}_t^{m,n}, \tilde{e}_m)_H)$ 为 $\mathbf{R}^m$ -值的 $\mathcal{F}_t^n$ -鞅. 根据有限维结果^[3,4], 可得: 存在矩阵 $f^{n,m}(s) = (f_{i,j}^{n,m})_{i,j=1}^m$, 与向量 $g^{n,m}(s) = (g_i^{n,m})_{i=1}^m$ 满足:

$$M_t^{m,n} = \int_0^t f^{n,m}(s) dW^n(s) + \int_0^t \int_Z g^{n,m}(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz) \quad (2)$$

其中, $W_n(t) = (W(t) e_1, \dots, W(t) e_n)$ 是 n 维的标准 BM, 且 $f^{n,m}(t)$ 为 $\mathcal{F}_t^n \subset \mathcal{F}_t$ 适应, $g^{n,m}(t)$ 为 $\mathcal{F}_t$ 可料, 满足

$$\mathbb{E} \int_0^T |f^{n,m}(t)|^2 dt + \mathbb{E} \int_0^T \int_Z |g^{n,m}(t, z)|^2 \Pi(dz) dt < \infty$$

令 $\tilde{f}^{n,m}: K \rightarrow H_m, \tilde{g}^{n,m}: H_m \rightarrow H_m$ 满足

$$(\tilde{f}^{n,m} e_i, \tilde{e}_k) \triangleq f_{ki}^{n,m}, 1 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq n; (\tilde{g}^{n,m} e_i, \tilde{e}_k) \triangleq g_k^{n,m}, 1 \leq k \leq m;$$

$$(\tilde{f}^{n,m} e_{n+j}, \tilde{e}_k) = 0, 1 \leq k \leq m, \forall j = 1, 2, \dots$$

由于 $\tilde{M}_t^{m,n} = \sum_{k=1}^m (\tilde{M}_t^{m,n}, \tilde{e}_k) \tilde{e}_k$, 故由 (2) 式可得

$$\tilde{M}_t^{m,n} = \int_0^t \tilde{f}^{n,m} dW(s) + \int_0^t \int_Z \tilde{g}^{n,m}(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz) = \int_0^t \tilde{f}^{n,m} dW(s) + \int_0^t \int_Z \tilde{g}^{n,m}(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz) \quad (3)$$

以下证明

$$\tilde{f}^{n,m}(\cdot) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}^2(K, H_m)), \tilde{g}^{n,m}(\cdot, \cdot) \in F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H_m)$$

后者显然, 只需证前者. 事实上

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T |\tilde{f}^{n,m} e_i|^2_{H_m} ds = \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^T (\tilde{f}^{n,m} e_i, \tilde{e}_k)^2_{H_m} ds = \mathbb{E} \int_0^T |f^{n,m}(s)|^2 ds < \infty$$

所以 $\tilde{f}^{n,m} \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}^2(K, H_m))$. 又因为

$$|\tilde{M}_t^{m,n}|^2 \leq \mathbb{E}(|\tilde{M}_t^m|^2 | \mathcal{F}_t^n)$$

所以 $\{|\tilde{M}_t^{m,n}|^2\}_{n=1}^{\infty}$ 是一致可积的 (文 [7], 定理 I 6.5), 由 Levy 定理又可得: 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\tilde{M}_t^{m,n} \rightarrow \tilde{M}_t^m$. 所以当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\mathbb{E}|\tilde{M}_t^{m,n} - \tilde{M}_t^m|^2 \rightarrow 0$. 因而存在

$$\tilde{f}^m \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}^2(K, H_m)), \tilde{g}^m \in F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H_m)$$

使得:

$$\mathbb{E} \int_0^T [|\tilde{f}^{n,m}(s) - \tilde{f}^m(s)|^2_{\mathcal{L}^2(K, H_m)} + \int_Z |\hat{g}^{n,m}(s, z) - \hat{g}^m(s, z)|^2_{H_m} \Pi(dz)] ds \rightarrow 0$$

因此在 (3) 式中令 $n \rightarrow +\infty$ 结合 (1) 式可得:

$$\tilde{M}_t^m = \int_0^t \tilde{f}^m(s) dW(s) + \int_0^t \int_Z \hat{g}^m(s, z) \tilde{N}_k(ds, dz) \quad (4)$$

现由于 $|\tilde{M}_t^m|^2 \leq |M_t|^2, \forall m \geq 1$, 故由控敛定理可得: 当 $m \rightarrow +\infty$ 时, $\mathbb{E}|\tilde{M}_t^m - M_t|^2 \rightarrow 0$. 故又存在

$$f \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}^2(K, H)), g \in F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$$

当 $m \rightarrow +\infty$ 时,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |f^m(s) - f(s)|^2_{\mathcal{L}^2(K, H)} ds + \int_0^T \int_Z |g^m(s, z) - g(s, z)|^2 \Pi(dz) ds \right] \rightarrow 0$$

在 (4) 式中令 $m \rightarrow +\infty$, 可得定理的结论.

2 带跳倒向随机发展方程简化情形的解

定理 2 (基本定理) 给定 $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; H)$, 设满足下列条件之一:

1) $\{e^{At}, t \geq 0\}$ 为一致有界的 C_0 -算子半群, 且 $f \in \mathcal{A}^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$;

2) $\{e^{At}, t \in \mathbf{R}\}$ 为一致有界的 C_0 -算子群, $f(t)$ 为 $\mathcal{F}_t$ -可料且 $\mathbb{E} \left| \int_0^T |f(s)| ds \right|^2 < \infty$. 则存在唯一的一组 $(x, q, p, (\cdot)) \in L^2_{\mathcal{A}}(0, T; H) \times L^2_{\mathcal{A}}(0, T; \mathcal{L}^2(K, H)) \times F^2_{\mathcal{A}}(0, T; H)$ 满足: $\forall t \in [0, T]$,

$$x_t + \int_t^T e^{A(s-t)} f(s) ds + \int_t^T e^{A(s-t)} (q_s) dW(s) + \int_t^T \int_Z e^{A(s-t)} (p_s(Z)) N_k(ds, dz) = e^{A(T-t)} X \quad (5)$$

且在假设 1) 情形, 有 $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E} |x_t|^2 \leq 2M_0^2(T-t) \cdot \mathbb{E} \int_t^T |f(s)|^2 ds + 2M_0^2 \mathbb{E} |X|^2 \quad (6)$$

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |q_s|^2 ds + \int_t^T \int_Z |p_s(z)|^2 \Pi(dz) ds \right] \leq 8M_0^2(T-t) \mathbb{E} \int_t^T |f(s)|^2 ds + 8M_0^2 \mathbb{E} |X|^2 \quad (7)$$

$$\mathbb{E} |e^{AT} x_T|^2 \leq (4M_0^2 + 320M_0^4) \cdot (\mathbb{E} |X|^2 + T \mathbb{E} \int_0^T |f(s)|^2 ds) \quad (8)$$

其中, $f(T)^* \triangleq \sup_{t \in [0, T]} f(t)$, $M_0 = \|e^{AT}\|$. 在假设 2) 情形, 有更好的估计式:

$$E|x_t|^2 \leq 2M_0^2 E \left| \int_t^T |f(s)| ds \right|^2 + 2M_0^2 E|X|^2 \quad (6')$$

$$E \left[\int_t^T |q_s|^2 ds + \int_t^T \int_Z |p_s(z)|^2 \Pi(dz) ds \right] \leq 9M_0^4 E \left| \int_t^T |f(s)| ds \right|^2 + 9M_0^4 E|X|^2 \quad (7')$$

$$E|x_T|^2 \leq (4M_0^4 + 320M_0^6) \cdot [E|X|^2 + E \left(\int_0^T |f(s)| ds \right)^2] \quad (8')$$

注 若记 $S_{\mathcal{A}}^2(0, T; H) = \{f: f(t) \text{ 为 } \mathcal{F}_t \text{ 适应, 且 } E|f(T)|^2 < \infty\}$, 则情形 2) 其实得到了存在唯一解 $(x, q, p) \in S_{\mathcal{A}}^2(0, T; H) \times L_{\mathcal{A}}^2(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F_{\mathcal{A}}^2(0, T; H)$.

证明 唯一性容易由取条件期望得出, 兹从略. 存在性: 由定理 1, 对于 $\forall s \in [0, T]$, 分别存在唯一的一组 $(K(s, \cdot), J(s, \cdot, \cdot), (L(\cdot), H(\cdot, z)))$, 均属于 $L_{\mathcal{A}}^2(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F_{\mathcal{A}}^2(0, T; H)$, 使得分别满足

$$E^{\mathcal{F}} f(s) = E(f(s) | \mathcal{F}_t) = Ef(s) + \int_0^t K(s, \theta) dW(\theta) + \int_0^t \int_Z J(s, \theta, z) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \quad (9)$$

$$E^{\mathcal{F}} X = EX + \int_0^t L(\theta) dW(\theta) + \int_0^t \int_Z H(\theta, z) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \quad (10)$$

易知, 对于 $\forall s \in [0, T], K(s, \theta) = 0, J(s, \theta, \cdot) = 0, a.e. \theta \in [s, T], a.s.$ 在 (9) 式中取 $t = s$, 可得 $Ef(s)$ 的表示式, 再代回 (9) 式中. 对 (10) 式也作类似处理, 可得: 当 $s > t$,

$$E^{\mathcal{F}} f(s) = f(s) - \int_t^s K(s, \theta) dW(\theta) + \int_t^s \int_Z J(s, \theta, z) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \quad (11)$$

$$E^{\mathcal{F}} X = X - \int_t^T L(\theta) dW(\theta) - \int_t^T \int_Z H(\theta, z) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \quad (12)$$

现今
$$x_t = E^{\mathcal{F}}_t \left[e^{A(T-t)} X - \int_t^T e^{A(s-t)} f(s) ds \right] \quad (13)$$

把上两式代入可得

$$\begin{aligned} x_t = & e^{A(T-t)} \left[X - \int_t^T L(\theta) dW(\theta) - \int_t^T \int_Z H(\theta, z) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \right] - \\ & \int_t^T e^{A(s-t)} \left[f(s) - \int_t^s K(s, \theta) dW(\theta) - \int_t^s \int_Z J(s, \theta, z) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \right] ds \end{aligned}$$

注意到映射

$$\begin{aligned} \nabla : (s, K', J') \in [0, T] \times L_{\mathcal{A}}^2(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F_{\mathcal{A}}^2(0, T; H) \rightarrow \\ \left(s, \int_0^T K'(\theta) dW(\theta) - \int_0^T \int_Z J'(s, \theta) \tilde{N}_k(d\theta, dz) \right) \in [0, T] \times L_0^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; H) \end{aligned}$$

是连续的双向一一映射. 这里

$$L_0^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; H) = \{X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P; H) \mid EX = 0\}.$$

同时, 从

$$[0, T] \times L_{\mathcal{A}}^2(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F_{\mathcal{A}}^2(0, T; H) \rightarrow L_{\mathcal{A}}^2(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F_{\mathcal{A}}^2(0, T; H)$$

的投影映射 $\text{Pr}(s, K', J') = (K', J')$ 也是连续的. 由

$$(K(s, \theta), J(s, \theta, z)) = \text{Pr}(s, K(s, \theta), J(s, \theta, z)) = \text{Pr}(\nabla^{-1}(s, f(s) - Ef(s)))$$

可得 K 是关于 $\mathcal{A}[0, T] \otimes \mathcal{P}$ 可测, J 关于 $\mathcal{A}[0, T] \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{A}(Z)$ 可测. 故可应用随机 Fubini 定理, 得出 (x_t, q_t, p_t) 满足条件 (5), 其中

$$q_s = e^{A(T-s)} L(s) - \int_s^T e^{A(\alpha-s)} K(\alpha, s) d\alpha \quad (14)$$

$$p_s(z) = e^{A(T-s)} H(s, z) - \int_s^T e^{A(\alpha-s)} J(\alpha, s, z) d\alpha \quad (15)$$

剩下只需证

$$(x, q, p) \in L_{\mathcal{A}}^2(0, T; H) \times L_{\mathcal{A}}^2(0, T; \mathcal{B}(K, H)) \times F_{\mathcal{A}}^2(0, T; H)$$

及估计式为真. 事实上, 在情形 1): 由 (11), (12) 式, 可得对于 $\forall 0 \leq t \leq s \leq T$, 有

$$\begin{aligned} E \int_t^s |K(s, \theta)|^2 d\theta + E \int_t^s \int_Z |J(s, \theta, z)|^2 \Pi(dz) d\theta &\leq E |f(s) - Ef(s)|^2 \leq 4E |f(s)|^2 \\ E \int_t^T |L(\theta)|^2 d\theta + E \int_t^T \int_Z |H(\theta, z)|^2 \Pi(dz) d\theta &\leq 4E |X|^2 \end{aligned}$$

从 (14), (15) 式可推出

$$\begin{aligned} E \left[\int_t^T |q_\theta|^2 d\theta + \int_t^T \int_Z |p_\theta(z)|^2 \Pi(dz) d\theta \right] &\leq \\ 2M_0^2 E \left[\int_t^T |L(\theta)|^2 d\theta + (T-t) \int_t^T \int_\theta^T |K(s, \theta)|^2 ds d\theta + \int_t^T \int_Z |H(\theta, z)|^2 \Pi(dz) d\theta + \right. \\ \left. (T-t) \int_t^T \int_Z \left(\int_\theta^T |J(s, \theta, z)|^2 ds \right) \Pi(dz) d\theta \right] &\leq 8M_0^2 E |X|^2 + 8M_0^2 (T-t) E \int_t^T |f(s)|^2 ds \end{aligned}$$

从定义式 (13) 立即可得:

$$E |x_t|^2 \leq 2M_0^2 E |X|^2 + 2M_0^2 (T-t) E \int_t^T |f(s)|^2 ds$$

最后, (8) 式可由 (5) 式, 鞅不等式, 及 (6) 式推出.

在情形 2): 应用 $\{e^{At}, t \in \mathbf{R}\}$ 为算子群的假设, 类似于 (8) 式等, 可以得到

$$\begin{aligned} E |x_T|^{2*} &\leq M_0^2 E |e^{AT} x_T|^{2*} \leq (4M_0^4 + 320M_0^6) \left[E |X|^2 + E \left(\int_0^T |f(s)| ds \right)^2 \right] \\ E \left(\int_t^T |q_s|^2 ds + \int_t^T \int_Z |p_s(z)|^2 \Pi(dz) ds \right) &\leq M_0^2 E \left(\int_t^T |e^{A(s-t)} q_s|^2 ds + \right. \\ \left. \int_t^T \int_Z |e^{A(s-t)} p_s(z)|^2 \Pi(dz) ds \right) &\leq 9M_0^4 \left(E |X|^2 + E \left(\int_0^T |f(s)| ds \right)^2 \right) \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] EL KAROUI N, PENG S, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Math Finance, 1997, 7: 1 - 71.
- [2] HU Y, PENG S. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control system[J]. Stochastics and Stochastic Reports, 1990, 33: 159 - 180.
- [3] TANG S, LI X. Necessary condition for optimal control of stochastic systems with random jumps[J]. SIAM J Control Optim, 1994, 32: 1447 - 1475.
- [4] SITU R. Backward stochastic differential equations with jumps and applications[M]. Guangzhou: Guangdong Science and Technology Press, 2000.
- [5] SITU R. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications[J]. Stoch Process Appl, 1997, 66: 209 - 236.
- [6] HU Y, PENG S. Adapted solution of a backward semilinear stochastic evolution equation[J]. Stoch Anal Appl, 1991, 9: 445 - 459.
- [7] IKEDA N, WATANABE S. Stochastic differential equations and diffusion processes[M]. 2nd edition. New York: North-Holland Pub Co, 1989.

Adapted Solutions of Backward Stochastic Evolution Equations with Jumps on Hilbert Space

SITU Rong, XU Huan-yao

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The martingale representation theorem is obtained for the cylindrical Brownian Motion and Poisson martingale measure on Hilbert spaces. Then the existence and uniqueness of adapted solutions of some backward stochastic evolution equations with jumps on Hilbert spaces are proved in the cases of operator semi-groups and operator groups with weaker conditions respectively. Some useful estimates are also obtained.

Keywords: martingale representation theorem; backward stochastic evolution equation with jumps; adapted solution